Corrigé – TS -2019 – Amérique du Sud

$$f(t)=3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}+2 \text{ avec } t\geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** On a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0}=1$, donc $f(0)=3\times 0\times 1+2=0+2=2$.

   b. On a $12\text{ s}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$ (min).

   On calcule $f(0{,}2)=3\times 0{,}2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0{,}2}+2=0{,}6\mathrm{e}^{-0{,}05}+2\approx 2+0{,}57\approx 2{,}57$.

   Ce taux est supérieur à 2,5, donc anormal.

   c. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}-\dfrac{1}{4}t=-\infty$.

   Avec $X=-\frac{1}{4}t$, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}-\dfrac{1}{4}t=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}X\mathrm{e}^{X}=$, donc finalement : $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=2$.

   Cela signifie qu'à terme le taux de vasopressine va se stabiliser à 2 μg/mL.

2. f somme et produit de fonctions dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(t)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}+3t\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(3-\dfrac{3}{4}t\right)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(1-\dfrac{1}{4}t\right)=\dfrac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$.

3. **a.** On sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}>0$; le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4-t$:
   - $4-t \iff 4>t$;
   - $4-t \iff 4<t$;
   - $4-t=0 \iff 4=t$.

   Conclusion : la fonction f est
   - croissante sur $[0;4]$ de $f(0)=2$ à $f(4)=3\times 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 4}+2=2+12\mathrm{e}^{-1}\approx 6{,}41$;
   - décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$ de $f(4)\approx 6{,}41$ à $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=2$.

   b. La fonction étant croissante sur $[0;4]$ de $f(0)=2$ à $f(4)\approx 6{,}41$ puis décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$, $f(4)=2+12\mathrm{e}^{-1}\approx 6{,}41$ est le maximum de la fonction sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Sur l'intervalle $[0;4]$, la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $f(0)=2$ à $f(4)\approx 4{,}71$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $t_0\in[0\,;\,4]$, tel que $f(t_0)=2{,}5$.

   La calculatrice donne :

   $f(0)=2$ et $f(1)\approx 4{,}33$, donc $0<t_0<1$;

   $f(0{,}1)\approx 2{,}29$ et $f(0{,}2)\approx 2{,}57$, donc $0{,}1<t_0<0{,}2$;

   $f(0{,}17)\approx 2{,}49$ et $f(0{,}18)\approx 2{,}52$, donc $0{,}17<t_0<0{,}18$;

   $f(0{,}174)\approx 2{,}499$ et $f(0{,}175)\approx 2{,}503$, donc $0{,}174<t_0<0{,}175$.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_1)=2{,}5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1\approx 18{,}930$.

   b. Sur l'intervalle $[t_0\,;\,4]$, la fonction f est croissante, donc sur cet intervalle $f(t)\geqslant f(t_0)=2{,}5$ et sur l'intervalle $[4\,;\,t_1]$ la fonction est décroissante donc sur cet intervalle $f(t)\geqslant f(t_1)=2{,}5$.

   On a donc $f(t)>2{,}5$ sur l'intervalle $]t_0\,;\,t_1[$ ce qui signifie que le taux de vasopressine sera anormal pendant $t_1-t_0\approx 18{,}93-0{,}175$ soit environ 18,755 min soit 18 min 45 s.